6/3 (月)
談話会
15:30〜

集中講義　6/3 (月) − 6/7 (金)　'91

於 阪大理　B346

野海正俊（東京大・教養）

量子群 $GL_q(n)$ の話題から

$GL(n)/SO(n)$ の量子化とその帯球函数

Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x;q,t)$, $t=q^{\frac{1}{2}}$.

① 量子群（Lie 群, Lie 環の拡張）

G, $\mathfrak{g}$

$\left\{\begin{array}{ll} A(G) & G \text{の座標環} \\ U(\mathfrak{g}) & \mathfrak{g} \text{の包絡環} \end{array}\right\}$ Hopf 代数

$A(G)$: $U(\mathfrak{g})$ 上の両側加群

q

$\left\{\begin{array}{l} A_q(G) = A(G_q) \\ U_q(\mathfrak{g}) \end{array}\right.$　Hopf 代数の組.

$A_q(G)$: $U_q(\mathfrak{g})$ の両側加群

② 量子群の枠組で, (帯)球函数が統制される?
どのような

∘ G-space

$X \leftarrow G \qquad X \times G \to X$

$A(X)$: $\mathbb{C}$-alg $\qquad A(G)$: Hopf代数

· $\rho_G : A(X) \to A(X) \otimes A(G)$

$\mathbb{C}$-algebra hom.

$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$

· $(A(X), \rho_G)$: $A(X)$が ρ_G を co-action とする $A(G)$-comodule

$$A(X/G) = \{ \varphi \in A(X) ;\ \rho_G(\varphi) = \varphi \otimes 1 \}$$

G-不変

① 部分群.

<u>狭義の部分群</u> $\qquad G \supset K$

$$A(G) \xrightarrow[\mathrm{rest}_K]{} \!\!\!\!\!\to A(K)$$

Hopf代数の全射準同型

($U_q(\mathfrak{g}) \supset U_q(\mathfrak{k})$ Hopf subalg.)

$\Delta : A(G) \to A(G) \otimes A(G)$

$G \to G \leftarrow G$

$G \supset H, K \qquad$ 狭義の部分群

$\rho_K^R : A(G) \xrightarrow{\Delta} A(G) \otimes A(G) \xrightarrow{id \otimes \mathrm{rest}_K} A(G) \otimes A(K)$

$\rho_H^L : A(G) \xrightarrow{\Delta} A(G) \otimes A(G) \to A(H) \otimes A(G)$

· $X = H \backslash G$: $A(X) = A(H\backslash G) = \{ \varphi \in A(G) : \rho_H^L(\varphi) = 1 \otimes \varphi \}$

· $\mathcal{H} = A(H \backslash G / K) = \{ \varphi \in A(G) : \rho_H^L(\varphi) = 1 \otimes \varphi ,\ \rho_K^R(\varphi) = \varphi \otimes 1 \}$

$A_q(G) = A(G_q) \leftrightarrow U_q(\mathfrak{g})$

$\varphi \in A(G_q)$ $\qquad$ (H, K)に関する 帯球函数 (zsf)

$\Leftrightarrow$ (0) $\varepsilon(\varphi) = 1 \qquad (\varphi(e) = 1)$

(1) $\varphi \in A(H \backslash G / K)$

(2) $\forall C \in \mathrm{Cent}(U_q(\mathfrak{g}))\ \exists \lambda \in \mathbb{C}$

$C\varphi = \lambda \varphi$

広義の部分群

$G \supset K$ classical

例えば

$\mathfrak{k} \subset U_q(\mathfrak{g})$ vector subspace (Kに対応)

$J = U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}U_q(\mathfrak{g})$ が

coideal:

$$\Delta(J) \subset U_q(\mathfrak{g})\otimes J + J\otimes U_q(\mathfrak{g})$$

Ⅲ 話の経緯

($SL_q(2)$ の compact real form)

(0) $G = SU_q(2)$

$\quad \cup$

$K = U(1)$ 対角部分群(狭義)
(これ以外ない)

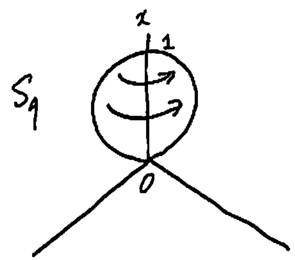
$S_q^2 := K\backslash G$ quantum 2-sphere

$\mathcal{H} = A(K\backslash G/K)$

$\Rightarrow$ zsf は little q-Legendre 多項式

[0,1] の上の Jackson 積分についての
直交多項式

$$\int_0^c f(x)\,d_qx = \sum_{k=0}^{\infty} f(cq^k)(cq^k - cq^{k+1})$$



G の Haar measure の制限

$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$

は Jackson 積分

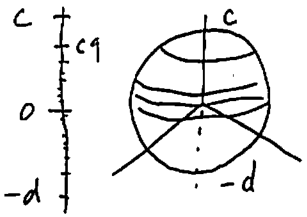
行列要素: little q-Jacobi
'87~88

(1) Podles の quantum 2-sphere

∃ family of quantum 2-spheres $S_q^2(c,d)$

$S_q^2 = S_q^2(1,0)$

さまざまの sphere



$S_q^2(c,d) \leftarrow G \supset K$

$\Rightarrow$ zsf は big q-Legendre (N-M)

$[-d,c]$ での Jackson 積分

$\left(= \int_{-d}^{c} = \int_0^{c} - \int_0^{-d} \right)$

(注意) 広義の部分群を使うと実現できる:

$SU(2) \supset K_{c,d} = g\,U(1)\,g^{-1}$

$K_{c,d} \backslash SU(2)$ の量子化が $S_q^2(c,d)$

$K_{c,d}$ に対応する $\mathfrak{k}_{c,d} = \mathbb{C}\theta_{c,d}$
$\subset U_q(su(2))$

$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; $\theta_{cd} \sim -2\alpha\beta \cdot e + (\alpha\delta + \beta\gamma)\cdot h + 2\gamma\delta \cdot f$

(2) $SO(2)\backslash SU(2)/SO(2)$ の量子化 (Koornwinder)

$\begin{cases} K_{(1,0)} = U(1) \\ K_{(1,1)} = SO(2) \end{cases}$

$\theta_{1,1} \in U_q(su(2))$

$\Rightarrow$ zsf : continuous q-Legendre 多項式

$\int_{-1}^{1} f(x)\, \underset{\uparrow}{w(x)}\, dx \leftarrow$ Riemann 積分

theta など weight funct

$\rightarrow$ 一般化 $K_{c,d} \backslash SU(2) / K_{c',d'}$ の量子化

$\Rightarrow$ zsf は 2-parameter family of Askey-Wilson polynomials

(K zonal
N-M non-zonal

rankの高い場合

$SO(n,\mathbb{R})\backslash U(n)/SO(n,\mathbb{R})$ $\quad$ ($GL(n)/SO(n)$ complex form)

- $n=2$: Koornwinder, N-M
- $n=3$: Ueno-Takebayashi z.s.f. Macdonald 多項式
- Jing-Yamada zsf については conjecture.

$$A_q(GL(n)) \doteq A(GL_q(n))$$
$$= \mathbb{C}[t_{ij}\ (1\leq i,j\leq n);\ \det_q(T)^{-1}]$$
$$\updownarrow$$
$$U_q(\mathfrak{gl}(n)) = \mathbb{C}[q^{\pm\varepsilon_1},\cdots,q^{\pm\varepsilon_n}, e_1,\cdots,e_{n-1}, f_1,\cdots,f_{n-1}]$$

$$\mathfrak{gl}(n) = \bigoplus_{i,j}\mathbb{C}E_{ij} \supset \mathfrak{so}(n) = \bigoplus_{i<j}\mathbb{C}(E_{ij}-E_{ji})$$

$$U_q(\mathfrak{gl}(n)) = U^-\otimes\mathbb{C}[q^h]\otimes U^+$$

U^+ 側 $\quad L^-_{ij}\ (i>j) \leftrightarrow E_{ji}$

U^- 側 $\quad L^+_{ij}\ (i\leq j) \leftrightarrow E_{ji}$

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{i<j}\mathbb{C}M_{ij}\ ;\quad M_{ij} = L^+_{ij} - S(L^-_{ji})$$
$$\leftrightarrow E_{ji}-E_{ij}$$

$\mathfrak{k}$ は 先の 広義の部分群を生成

$$\mathcal{H} = A_q(K\backslash G/K) = \{\varphi\in A_q(G);\ \mathfrak{k}\varphi=0,\ \varphi\mathfrak{k}=0\}$$
$$\left(\begin{array}{l} K=SO(n)\\ G=GL(n)\end{array}\right.$$

$$\mathcal{H}\to A_q(G) \overset{\mathrm{rest}_{\mathbb{T}}}{\twoheadrightarrow} A(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}]$$

定理 $\mathrm{rest}_{\mathbb{T}}:\mathcal{H}\to A(\mathbb{T})$ は injective,
とくに $\mathcal{H}$ は可換

$$\mathcal{H}|_{\mathbb{T}} = \mathbb{C}[x_1^2,\cdots,x_n^2]^{\mathfrak{S}_n}[(x_1\cdots x_n)^{\pm1}]$$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda\in P^+_{\mathfrak{k}}}\mathcal{H}_\lambda\ ;\quad \mathcal{H}_\lambda = \mathbb{C}\varphi_\lambda$$

$$P^+_{\mathfrak{k}} = \{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n;\ \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n,\ \lambda_i-\lambda_j\in2\mathbb{Z}\}$$

$$\varphi_\lambda\Big|_{T} = \text{const.}\ P_\mu(x_1^2, \cdots, x_n^2; q^4; q^2)\cdot(x_1\cdots x_n)^l$$

$$\lambda = 2\mu + l(1,\cdots,1)$$

$$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

$$\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_n \geqq 0$$

(Cent U の elmt $\underset{\text{radial part}}{\longrightarrow}$ Macdonald の def した q-difference op.)

~16:40

6/4 (火)

15:30 -

量子群 $GL_q(n)$ の話題から

$$\begin{cases} A_q(GL(n)) \\ U_q(\mathfrak{gl}(n)) \end{cases}$$

- Hopf 代数
- $GL_q(n)$ とその表現 $\qquad \left.\begin{matrix} A_q \\ U_q \end{matrix}\right\}$ 構造, 表現
- Capelli 恒等式
- $(GL(n)/SO(n))_q$ と帯球函数.

階数の高い case を controle

R行列

§0 Hopf 代数

阿部英一, ホップ代数 (岩波)

係数体は $\mathbb{C}$ として明記しない.

1° 定義といくつかの例

$M = Mat(n) \quad n\times n \quad \simeq \mathbb{C}^{n^2}$

座標 $t_{ij} \quad (1\leq i,j \leq n)$

$t_{ij} : Mat(n) \to \mathbb{C} \qquad$ linear

$A = (a_{\mu\nu})_{\mu\nu} \to a_{ij}$

$G = GL(n) \subset M.$

座標環

$A(M) = \mathbb{C}[t_{ij} \ (1 \leq i,j \leq n)]$

$\cap$

$A(G) = A(M)[\det(T)^{-1}]$

$T = (t_{ij})_{ij} \in Mat(n, A(M))$

行列の積 → 座標環の言葉に翻訳する.

(1) 積 $G \times G \to G$ $(x, y) \mapsto xy$

⇒ 余積 $\Delta : A(G) \to A(G \times G)$
coproduct
comultiplication
$\mathbb{C}$ alg hom

$\varphi \in A(G)$

$(\Delta\varphi)(x, y) = \varphi(xy)$

$A(G \times G)$

$\iota \uparrow \wr$

$A(G) \otimes A(G)$

$\iota(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$

(2) 単位元 $\{e\} \hookrightarrow G$

⇒ counit $\varepsilon : A(G) \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ alg hom

$\varepsilon(\varphi) = \varphi(e)$

(3) 逆元をとる $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$

⇒ antipode

$S : A(G) \to A(G)$

$S(\varphi)(x) = \varphi(x^{-1})$

$(A(G), \Delta, \varepsilon, S)$ を抽象化して得られるもの: Hopf代数.

例1 $G = GL(n)$

$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}$

$\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$

$S(t_{ij}) = \tilde{t}_{ij} \det(T)^{-1}$

$\tilde{t}_{ij} = (-)^{i-j} \det(T^{\hat{j}}_{\hat{i}})$

$x = (x_{\mu\nu})_{\mu\nu}$

$t_{ij}(x) = x_{ij}$

$t_{ij}(xy) = \sum x_{ik} y_{kj}$

$= \sum t_{ik}(x) t_{kj}(y)$

$= (\sum t_{ik} \otimes t_{kj})(x, y)$

定義0.1 (A, Δ, ε) が bi-algebra

$\Leftrightarrow$ (0) $A : \mathbb{C}$-alg $(\ni 1)$

(1) $\Delta : A \to A \otimes A$ $\mathbb{C}$-alg hom

coassociative

$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

(2) $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-alg hom

$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id$, $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id$

注意

(1) $A \otimes B$ には, 何もことわらなければ, 次の積を入れて $\mathbb{C}$-alg とみる

$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$

$($ $a \otimes 1$ $(a \in A)$, $1 \otimes b$ $(b \in B)$ は可換 $)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\ A\otimes B \arrow[r, dashed, "\exists h"] & C \\ B \arrow[u] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$[f(A), g(B)] = 0$

の下の universality

(2)

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ A\otimes A \arrow[dr, "\Delta\otimes id"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & A\otimes A \arrow[dl, "id\otimes\Delta"] \\ & A\otimes A\otimes A & \end{tikzcd}$$

coassociativity

element で書くこと.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ \mathbb{C}\otimes A \arrow[dr, "\simeq"'] & & A\otimes\mathbb{C} \arrow[dl, "\simeq"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

counit

$\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2$

algebra $\sum_i \varepsilon(\varphi_i^1)\varphi_i^2 = \varphi = \sum_i \varphi_i^1 \varepsilon(\varphi_i^2)$

(3) A $\quad \mu : A\otimes A \to A$

$\iota : \mathbb{C} \to A$

self dual な概念.

<u>定義 0.2.</u> (A, Δ, ε) bialgebra

$S : A \to A$ が antipode

$\Leftrightarrow$ (0) S : $\mathbb{C}$-linear

(1) $\mu\circ(S\otimes id)\circ\Delta = \iota\circ\varepsilon = \mu\circ(id\otimes S)\circ\Delta$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \\ A\otimes A \arrow[d, "S\otimes id"'] & \mathbb{C} \arrow[dd] & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes S"] \\ A\otimes A \arrow[dr, "\mu"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$\varphi(x^{-1}x) = \varphi(e)1 = \varphi(x\cdot x^{-1})$

<u>命題 0.3</u> : A : bialgebra とするとき

(0) antipode S は存在すれば唯一つ

(1) antipode S は次の性質をもつ

(i) $S(\varphi\psi) = S(\psi)S(\varphi)$, $S(1) = 1$

$\mathbb{C}$-alg の anti-hom

(ii) $\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(S(\varphi)) = \sum_i S(\varphi_i^2)\otimes S(\varphi_i^1) \\ \varepsilon(S(\varphi)) = \varepsilon(\varphi) \end{cases}$

co alg の anti-hom

(iii) A : commutative $\Rightarrow S^2 = id$

(iv) A : co-commutative $\Rightarrow S^2 = id$.

定義 0.4　antipode をもつ bialg. を Hopf alg という.

注意 (1) 一般には $S^2 \neq id$

(2) $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ が Hopf alg で S が可逆

$\Rightarrow (A, \tau\circ\Delta, \varepsilon, S^{-1})$ も Hopf alg

$\tau : A\otimes A \to A\otimes A$
$\varphi\otimes\psi \to \psi\otimes\varphi$

補題 0.5

(1) C : coalg, A : alg

$H = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C, A)$

$f, g : C \to A$

・ $f * g = \mu_A \circ (f\otimes g)\circ\Delta_C$

$\delta = \eta_A \circ \varepsilon_C$

と定めると

$(H, *, \delta)$ は $\mathbb{C}$-alg.

(2) A : bialg のとき　$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, A)$ について

S : antipode $\Leftrightarrow$ S は $*$ についての id_A の両側逆:

$S * id_A = \delta = id_A * S$

例 2.　$G = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$　直線の affine 変換群 $(ax+b)$ group
$\quad\;\; \Psi$
$\quad (b, a)$

$(b, a)(b', a') = (b + ab', aa')$,　$e = (0, 1)$

$A(G) = \mathbb{C}[b, a^{\pm 1}]$

$$\begin{cases} \Delta(a) = a\otimes a & \varepsilon(a) = 1 \\ \Delta(b) = b\otimes 1 + a\otimes b & \varepsilon(b) = 0 \end{cases}$$

$$\underset{0}{\overset{\|}{\varepsilon(b)}} = S(b)\cdot 1 + \underset{a^{-1}}{\overset{\|}{S(a)}}\, b$$

$\therefore\; S(b) = -a^{-1}b$

$A_q(G) = \mathbb{C}[b, a^{\pm}\ ;\ ab = q\,ba]$

この algebra では

$S(b) = -a^{-1}b$

$S^2(b) = -S(b)S(a^{-1})$

$= -a^{-1}ba = -q^{-1}b.$

例3　$\mathfrak{g}$: Lie alg.

$U = U(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra

$\Delta : U \to U \otimes U$,　$\varepsilon : U \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X \\ \varepsilon(X) = 0 \\ S(X) = -X \qquad (X \in \mathfrak{g}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(\varphi\psi) = (X\varphi)\psi + \varphi X\psi \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

derivation rule を表わしている.

○ coproduct の役割

coproduct ⇒ U-module の tensor 積

〈一般の Hopf alg U について〉

(0) : $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ を介して $\mathbb{C}$ は left U-module

($\mathbb{C}$-alg hom)

U の自明な表現　($a.1 = \varepsilon(a)1$)

(1) M, N : 2つの left U-modules

$M \otimes N$ には次のような left U-modul str. が入る.

$$a(u \otimes v) = \sum (a_i^1 u) \otimes (a_i^2 v)$$

$$(\Delta(a) = \sum a_i^1 \otimes a_i^2 , \quad a \in A)$$

Δ の coassociativity

$\Rightarrow (L \otimes M) \otimes N \simeq L \otimes (M \otimes N)$

$(u \otimes v) \otimes w \longleftrightarrow u \otimes (v \otimes w)$

ε :　$\mathbb{C} \otimes M \simeq M \simeq M \otimes \mathbb{C}$

(2) M : left U-module

$M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C}) \ni f$

$(af)(u) = f(S(a)u)$.

反傾表現,

M, N left U-module

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N) \ni f$

$$(a.f)(u) = \sum a_i^1 f(S(a_i^2)u)$$

で左-U module

$N \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$

$\mathrm{Hom}_U(\mathbb{C}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)) = \mathrm{Hom}_U(M, N)$

functorial etc.

(3) 一般には $M \otimes N \ncong N \otimes M$.

例4 有限群 G

$A(G) = \{\varphi : G \to \mathbb{C}\ ;\ \text{写像}\}$ Hopf alg

$A(G)^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A(G), \mathbb{C})$ Hopf alg

$\parallel$

$\mathbb{C}[G]$ 群環

$A(G)$, $U(\mathfrak{g})$ の二種類ができている

2° Hopf代数の間のpairing

$U(\mathfrak{g}) \times A(G) \to \mathbb{C}$

$(P, \varphi) = (\tilde{P}\varphi)(e)$

$\uparrow$ Pに対応する左不変微分作用素

($U(\mathfrak{g})$: e にささえをもつ distribution)

定義0.6 A, U : Hopf alg.

$(\ ,\ ) : U \times A \to \mathbb{C}$ が Hopf代数のpairing

$\Leftrightarrow$ (0) $(\ ,\ )$ は bilinear

(1) $(ab, \varphi) = (a \otimes b, \Delta_A(\varphi))$ $\leftarrow$ ($U \otimes U \times A \otimes A \to \mathbb{C}$ pairing)

$(1_U, \varphi) = \varepsilon_A(\varphi)$

(2) $(a, \varphi\psi) = (\Delta_U(a), \varphi \otimes \psi)$.

$(a, 1_A) = \varepsilon_U(a)$

(3) $(a, S_A(\varphi)) = (S_U(a), \varphi)$

$a, b \in U$, $\varphi, \psi \in A$

$(\ ,\ ) : U \times A \to \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mapsto (a, \cdot) : U \to A^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) \\ \varphi \mapsto (\cdot, \varphi) : A \to U^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C}) \end{cases}$$

(非退化性は当面仮定しない)

3° 表現

座標環 A 右(左) A-comodule

包絡環 U 左(右) U-module

定義0.7 M : $\mathbb{C}$-vector space

$\rho : M \to M \otimes A$: $\mathbb{C}$-linear

(M, ρ) right A-comodule

$\Leftrightarrow$ (1)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes A \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\rho \otimes id"'] & M \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] & M \otimes A \arrow[dl, "id \otimes \varepsilon"] \\ M \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\wr"] & \end{tikzcd}$$

$A = A(G)$

左 G-module $\quad G \times M \to M$

$$\varphi : M \longrightarrow A(G, M) = M \otimes A(G)$$
$$u \longmapsto (g \mapsto gu)$$

G上M値函数

(1) $(gh)u = g(hu)$

(2) $eu = u$

注意 $\quad M = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} u_i$ のとき

$$g \cdot u_j = \sum_i u_i \underbrace{\varphi_{ij}(g)}_{\in A(G)} \qquad \text{column finite}$$

$$\rho : M \to M \otimes A(G)$$

$$\rho(u_j) = \sum_i u_i \otimes \underbrace{\varphi_{ij}}_{\text{表現の行列要素}}$$

$$\Phi = (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \quad \in Mat(I; A)$$

(M, ρ) : 右 A-comodule

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta(\varphi_{ij}) = \sum_k \varphi_{ik} \otimes \varphi_{kj} \\ \varepsilon(\varphi_{ij}) = \delta_{ij} \end{cases}$$

$(\Leftrightarrow \ \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \ \Phi(e) = I \ )$

しかもこのとき

$$\Phi \in GL(I, A) \text{ で}$$
$$\Phi^{-1} = S(\Phi) = (S(\varphi_{ij}))_{i,j \in I}$$

例 $\quad \Delta : \underset{M}{A} \to \underset{M}{A} \otimes A \quad$ A は右 A comodule (右正則表現)

$\quad \Delta : \underset{M}{A} \to A \otimes \underset{M}{A} \quad$ A は左 A comodule (左正則表現)

• $(\ ,\ ) : U \times A \to \mathbb{C}$ Hopf alg の pairing を用いて A-comodule の"微分表現"を考えることができる。

(M, ρ) : 右 A-comodule

$$\rho : M \to M \otimes A$$

$a \in U, \quad u \in M$

$$a.u = (id \otimes a) \circ \rho(u)$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[rrr, bend right, "a"'] & M \otimes A \arrow[r, "id \otimes a"] & M \otimes \mathbb{C} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & M \end{tikzcd}$$

として M は左 U-module

(right A-comodules) $\rightarrow$ (left U-modules)
(left) — (right —

例 A は両側 U-module
左 U-module の str $\leftrightarrow$ 左正則表現
右 〃 $\leftrightarrow$ 右 〃 〃

㊟ $A \to U^{\vee}$ が injective
$\Rightarrow$ 上の functor は fully faithful

4° 量子 G-space と U-symmetry をもつ algebra

$A = A(G)$ G の"座標環" Hopf alg
$B = A(X)$ X の 〃 〃 〃 $\mathbb{C}$-alg

$X \curvearrowleft G$ $X \times G \to X$

$\rho_G : A(X) \to A(X) \otimes A(G)$

X : right G-space
$\leftrightarrow \begin{cases} \rho_G : \mathbb{C}\text{-alg hom} \\ (A(X), \rho_G) : \text{右 } A\text{-comodule} \end{cases}$

$\Rightarrow A(X)$: 左-U-module の構造をもつ.
$a \in U$ に対し
$$\begin{cases} (1) \quad \Delta_U(a) = \sum_i a_i^1 \otimes a_i^2 \\ \quad \Rightarrow a.(\varphi\psi) = \sum_i (a_i^1.\varphi)(a_i^2.\psi) \quad \varphi, \psi \in A(X). \\ (2) \quad a.1 = \varepsilon_U(a).1 \end{cases}$$

定義 0.8 $\mathbb{C}$-algebra B $(= A(X))$ が
左 U-module の構造をもっていて, 上の条件(1).(2) が成立するとき B は U-symmetry をもつ algebra という.

§1. 量子群 $GL_q(n)$

$q \in \mathbb{C}^{\times}$, $q^4 \neq 1$ (固定)

1° $Mat_q(n)$ を導入.
ひとつの発見的方法
㊟ quantum affine n-space
$\mathbb{C}_q^n$
$$A(\mathbb{C}_q^n) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n ; x_i x_j = q x_j x_i \ (i<j)]$$
$$= T(V) / (x_i \otimes x_j - q x_j \otimes x_i ; i<j)$$
$(V = \oplus \mathbb{C} x_i$)

$\mathbb{C}_q^n \leftarrow Mat_q(n)$, $\quad Mat_q(n) \to \mathbb{C}_q^n$

となるように $A(Mat_q(n))$ をつくる.

要請 (0) $A(Mat_q(n)) = \mathbb{C}[\,t_{ij}\,,(1\le i,j\le n)\ ;\ (*)\,]$

some relations

(1) $\exists \rho_R : A(\mathbb{C}_q^n) \to A(\mathbb{C}_q^n) \otimes A(Mat_q(n))$

$\mathbb{C}$-alg hom

$$\rho_R(x_j) = \sum x_i \otimes t_{ij}$$

(2) $\exists \rho_L : A(\mathbb{C}_q^n) \to A(Mat_q(n)) \otimes A(\mathbb{C}_q^n)$

$$\rho_L(x_i) = \sum t_{ij} \otimes x_j$$

これらの条件から t_{ij} の交換関係がきまってしまう.

$$x_j' = \rho_R(x_j) = \sum_i x_i \otimes t_{ij} \quad \text{とおく}$$

$i<j$ について
$$\begin{aligned}
0 &= x_i' x_j' - q\, x_j' x_i' \\
&= \sum_{\mu,\nu} x_\mu x_\nu \otimes t_{\mu i} t_{\nu j} \\
&\qquad - q \sum_{\mu,\nu} x_\nu x_\mu \otimes t_{\nu j} t_{\mu i} \\
&= \sum_\mu x_\mu^2 \otimes (t_{\mu i} t_{\mu j} - q\, t_{\mu j} t_{\mu i}) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\mu<\nu} x_\mu x_\nu \otimes \left(t_{\mu i} t_{\nu j} + q^{-1} t_{\nu i} t_{\mu j} - q\, t_{\mu j} t_{\nu i} - t_{\nu j} t_{\mu i}\right)$$

(2次 : x_i^2, $x_i x_j$ $(i<j)$ が base)

ρ_R の条件

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{ki} t_{kj} = q\, t_{kj} t_{ki} & i<j \\ t_{ij} t_{kl} - t_{kl} t_{ij} = q\, t_{il} t_{jk} - q^{-1} t_{jk} t_{il} & \cancel{i<j,\ k<l}\ \ i<k,\ j<l \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline k & t_{ki} & t_{kj} \end{array} = \quad a \quad b \qquad a \xleftarrow{q} b \ \ (ab = qba)$$

$$\begin{array}{c|cc} & j & l \\ \hline i & a & b \\ k & c & d \end{array} \qquad \begin{aligned} &ad - da \\ &= q\, bc - q^{-1} cb \end{aligned}$$

ρ_L の条件

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} a \\ \uparrow q \\ c \end{matrix} \quad \text{と} \qquad \begin{aligned} &ad - da \\ &= q\, cb - q^{-1} bc \end{aligned}$$

$$\left[\ \begin{aligned} &(q+q^{-1})\, bc = (q+q^{-1})\, cb \qquad (q^4 \neq 1) \\ &\Rightarrow bc = cb \end{aligned}\right.$$

定義 1.1.

$A(Mat_q(n))$ $\mathbb{C}$-alg.

$$\begin{cases} \text{生成元} & t_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n) \\ \text{関係式} & a \xleftarrow{q} b, \quad \begin{matrix} a \\ q\uparrow \\ c \end{matrix} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$\begin{cases} bc = cb \\ ad - da = (q - q^{-1}) bc. \end{cases}$$

命題 1.2.

$A(Mat_q(n))$ は次のような bialgebra の構造をもつ.

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad \varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$$

$T = (t_{ij})_{ij}$ 1つの表現

$V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} x_i$ 行列要素から生成される.

$A = (a_{ij})_{ij} \in Mat(n, \mathbb{N})$

$t^A = t_{11}^{a_{11}} t_{12}^{a_{12}} \cdots t_{1n}^{a_{1n}} \cdots t_{n1}^{a_{n1}} t_{nn}^{a_{nn}}$ (語順式)

定理 1.3. $A(Mat_q(n)) = \bigoplus_{A \in Mat(n, \mathbb{N})} \mathbb{C} t^A$

(証明は簡単とはいえない)

$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i \quad i < j \quad \begin{cases} q_{ii} = 1 \\ q_{ij} = q_{ji}^{-1} \end{cases}$

multi-parametric.

—17:40.

6/5(水) 15:30-

(注) Th1.3の後の充分条件
Diamond lemma (Bergman …?) を使う

$A(\mathrm{Mat}_q(n))$

$\mathbb{C}_q^n \leftarrow \mathrm{Mat}_q(n)$

2° R行列との関係

$$A(\mathbb{C}_q^n) = T(V)/(x_i\otimes x_j - q x_j\otimes x_i \ ;\ i<j)$$

$$V\otimes V \supset V_{\boxminus} = \bigoplus_{i<j} (x_i\otimes x_j - q x_j\otimes x_i) \qquad \varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$A(\mathbb{C}_q^n) = S_q(V) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_q(V)_d$$

$S_q(V)_d$

	$d=0$	$\mathbb{C}$
	$d=1$	V
	$d=2$	$V\otimes V/V_{\boxminus}$
	d	$V^{\otimes d}/V_{\boxminus}\otimes V^{\otimes d-2} + V\otimes V_{\boxminus}\otimes V^{\otimes d-3} + \cdots + V^{\otimes d-2}\otimes V_{\boxminus}$

今, V に sym. bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ で
$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ となるものが与えられているとして

$$V\otimes V = V_{\boxminus} \oplus \underset{2\varepsilon_1}{V_{\square\square}}$$

$$V_{\square\square} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\, x_i\otimes x_i \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(q x_i\otimes x_j + x_j\otimes x_i)$$

対応する projection を $pr_{\boxminus}$, $pr_{\square\square}$ とかく

$$\rho_R : A(\mathbb{C}_q^n) \to A(\mathbb{C}_q^n)\otimes \mathcal{A} \qquad \mathcal{A} = A(\mathrm{Mat}_q(n))$$

$$\begin{array}{ccc} V\otimes V & \longrightarrow & V\otimes V\otimes \mathcal{A} \\ \cup & & \cup \\ V_{\boxminus} & \xrightarrow{\rho_R} & V_{\boxminus}\otimes \mathcal{A} \end{array}$$

$$\rho_R(V_{\boxminus}) \subset V_{\boxminus}\otimes \mathcal{A}$$

$$(pr_{\square\square}\otimes id)\circ\rho_R\circ pr_{\boxminus} = 0$$

これが今回の計算.

$$V\otimes V/V_{\boxminus} \simeq V_{\square\square} \qquad x_\mu^2,\ x_\mu x_\nu$$

(ρの定義) $x_i\otimes x_j \mapsto \sum x_\mu\otimes x_\nu\otimes t_{\mu i}t_{\nu j} \ :\ T_1T_2$

$$T = (t_{ij})_{i,j} \in \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{A}$$
$$= \sum_{i,j} e_{ij} \otimes t_{ij}$$

$$T_1, T_2 \in \mathrm{End}(\underset{1}{V} \otimes \underset{2}{V}) \otimes \mathcal{A}$$

$$T_1 = T \otimes id_V, \quad T_2 = id_V \otimes T$$

$$\left(\begin{array}{l} T_1 = \sum e_{ij} \otimes id \otimes t_{ij} \\ T_2 = \sum id \otimes e_{ij} \otimes t_{ij} \\ T_1 T_2 = \sum e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes \underbrace{t_{ij} t_{kl}}_{\in \mathcal{A}} \end{array} \right.$$

ρ_Rの条件 $\Leftrightarrow$ $pr_{\Box\Box} T_1 T_2 pr_{\boxminus} = 0$

ρ_Lの条件 $\Leftrightarrow$ $pr_{\boxminus} T_1 T_2 pr_{\Box\Box} = 0$

いらつ様にまとめられて

$\rho_R \,\&\, \rho_L \Leftrightarrow pr_{\boxminus} T_1 T_2 = T_1 T_2 pr_{\boxminus}$

$\Leftrightarrow pr_{\Box\Box} T_1 T_2 = T_1 T_2 pr_{\Box\Box}$

$$\left(T_1 T_2 pr_{\boxminus} \underset{\underset{\rho_R}{\uparrow}}{=} pr_{\boxminus} T_1 T_2 pr_{\boxminus} = pr_{\boxminus} T_1 T_2 \right)$$

一般に $f = \alpha pr_{\Box\Box} + \beta pr_{\boxminus}$

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ $\alpha \neq \beta$ について

$\rho_R \,\&\, \rho_L = f T_1 T_2 = T_1 T_2 f$

注意

$q = 1$ $\quad pr_{\Box\Box} = \frac{1}{2}(1 + \tau)$

$\quad\quad\;\; pr_{\boxminus} = \frac{1}{2}(1 - \tau)$

$$\tau = pr_{\Box\Box} - pr_{\boxminus}$$

$$\begin{cases} \tau^2 = id, \\ \tau_{12} \tau_{23} \tau_{12} = \tau_{23} \tau_{12} \tau_{23} \end{cases}$$

$\tau_{12} = \tau \otimes id$, $\tau_{23} = id \otimes \tau$

$V \otimes V \otimes V$

補題1.4

$\check{R} \in \mathrm{End}(V \otimes V)$

$\check{R} = q \, pr_{\Box\Box} - q^{-1} pr_{\boxminus}$ とおくと

(1) $\begin{cases} \check{R}_{12} \check{R}_{23} \check{R}_{12} = \check{R}_{23} \check{R}_{12} \check{R}_{23} \quad (\text{braid relation}) \\ (\check{R} - q)(\check{R} + q^{-1}) = 0 \quad \text{i.e. } \check{R} \text{は可逆で} \end{cases}$

$\check{R}^{-1} = \check{R} - (q - q^{-1}) id$.

(2) $S = \alpha pr_{\Box\Box} + \beta pr_{\boxminus}$ として

$$S_{12} S_{23} S_{12} = S_{23} S_{12} S_{23}$$

と仮定すると、$S = \mathrm{const.}\, id$, $\mathrm{const.}\, \check{R}$, $\mathrm{const.}\, \check{R}^{-1}$

に限る.

証明は地道にやる． $\square$

具体形

$$pr_{\text{田}} = \frac{1}{q+q^{-1}}\Big(\sum_{i\neq j} q^{-\varepsilon(i-j)} e_{ii}\otimes e_{jj} + \sum_{i\neq j} e_{ij}\otimes e_{ji}\Big) + \sum_i e_{ii}\otimes e_{ii}$$

$$pr_{\text{日}} = \frac{1}{q+q^{-1}}\Big(\sum_{i\neq j} q^{\varepsilon(i-j)} e_{ii}\otimes e_{jj} - \sum_{i\neq j} e_{ij}\otimes e_{ji}\Big)$$

e_{ij} 行列単位　$e_{ij}(x_k) = \begin{cases} 0 & k\neq j \\ x_i & k=j \end{cases}$

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} +1 & i>0 \\ 0 & i=0 \\ -1 & i<0 \end{cases}$$

$$\check{R} = q\sum_i e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j} e_{ij}\otimes e_{ji} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} e_{ii}\otimes e_{jj}$$

以下

$P(=\tau) = \sum_{i,j} e_{ij}\otimes e_{ji} \in End(V\otimes V)$　flip

$$R^+ = \check{R}P = q\sum_i e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j} e_{ii}\otimes e_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} e_{ij}\otimes e_{ji}$$

$$R^- = \check{R}^{-1}P = q^{-1} \;\text{———}\; -(q-q^{-1})\sum_{i>j}$$

R^ε $(\varepsilon=\pm)$ は Yang-Baxter方程式をみたす．

$$R^\varepsilon_{12}R^\varepsilon_{13}R^\varepsilon_{23} = R^\varepsilon_{23}R^\varepsilon_{13}R^\varepsilon_{12}$$

$$\underset{1}{V}\otimes\underset{2}{V}\otimes\underset{3}{V}$$

$$\left(\begin{aligned} \because)\ & R^+_{12}P_{12}P^+_{23}\,P_{23}R^+_{12}P_{12} \\ &= R^+_{12}R^+_{13}R^+_{23} \times P_{12}P_{23}P_{12} \end{aligned}\right)$$

spectral parameter をもつ R 行列

$$R(x) = xR^+ - x^{-1}R^-$$

$$R_{12}(xy^{-1})R_{13}(xz^{-1})R_{23}(yz^{-1})$$

$$= R_{23}(yz^{-1})R_{13}(xz^{-1})R_{23}(xy^{-1})$$

注意
$$\begin{cases} \cdot\ (R^+_{12})^{-1} = R^-_{21} \\ \cdot\ {}^tR^\varepsilon_{12} = R^\varepsilon_{21} \\ \cdot\ R^+ - R^- = (q-q^{-1})P \end{cases}$$

$\cdot$ $R(q) = (q^2-q^{-2})\,pr_{\text{田}}P$

$R(q^{-1}) = (q-q^{-2})\,pr_{\text{日}}P$

$R(\pm1) = \pm(q-q^{-1})P$.

@ $A(\mathrm{Mat}_q(n))$ の生成元 の関係式は

$$\check{R}_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 \check{R}_{12}$$

or $$R^+_{12} T_2 T_1 = T_1 T_2 R^+_{12}$$

と書ける.

(命題1.1 の証明)

$\exists\ \Delta : A(\mathrm{Mat}_q(n)) \to A(\mathrm{Mat}_q(n)) \otimes A(\mathrm{Mat}_q(n))$ $\mathbb{C}$-alg hom.

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$$

$$\Delta(T) = T \dot{\otimes} T$$

$$R^+_{12} T_2 T_1 = T_1 T_2 R^+_{12}$$ ← 読み方 左辺をAとかくと

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $R^+ \Delta(T_2) \Delta(T_1) = \Delta(T_1) \Delta(T_2) R^+$

$$A = \sum e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes A^{ik}_{jl} = (A^{ik}_{jl})^{ik}_{jl}$$

$$A^{ik}_{jl} = \sum_{\mu,\nu} R^{+ik}_{\mu\nu} t_{\nu l} t_{\mu j}$$

左辺

$= R^+_{12} (T_2 \dot{\otimes} T_2)(T_1 \otimes T_1)$

$= R^+_{12} (T_2 T_1) \otimes (T_2 \otimes T_1)$

$= T_1 T_2 R^+_{12} \otimes (T_2 \otimes T_1)$

$= T_1 T_2 \otimes T_1 T_2 R^+_{12} = \Delta(T_1)\Delta(T_2) R^+_{12} =$ 右辺 //

3° 交代テンソル表現と quantum minors

$$A(\mathbb{C}^n_q) = S_q(V) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n;\ x_i x_j = q x_j x_i\ (i<j)]$$
$\nwarrow V_{\boxminus}$

$$\Lambda_q(V) = \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_n;\ y_i^2 = 0,\ q y_i y_j + y_j y_i = 0\ (i<j)]$$

$S_q(V)$ $\quad \mathbb{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

$\mathbb{x}_1 \mathbb{x}_2 (pr_{\boxminus})_{12} = 0$ $\qquad V \otimes V \xrightarrow{pr_{\boxminus}} V_{\boxminus} \subset V \otimes V$

$$pr_{\boxminus}(x_i \otimes x_j) = \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes x_\beta (pr_{\boxminus})^{\alpha\beta}_{ij}$$

or $\mathbb{x}_1 \mathbb{x}_2 R(q^{-1}) = 0$

$\rho_R : S_q(V) \to S_q(V) \otimes A$ $\quad$ alg. hom

$\rho_R(x_j) = x_i \otimes t_{ij}$ $\quad$ (命題1.1の証と同様)

同様に

$\Lambda_q(V)$ $\quad \mathbb{y} = (y_1, \cdots, y_n)$

$\quad : \mathbb{y}_1 \mathbb{y}_2 R(q) = 0$

命題 1.5

$\exists \rho : S_q(V) \to S_q(V) \otimes A(Mat_q(n))$

$\mathbb{C}$-alg. hom $\quad \rho(x_j) = \sum x_i \otimes t_{ij}$

$\exists \rho : \Lambda_q(V) \to \Lambda_q(V) \otimes A(Mat_q(n))$

$\mathbb{C}$-alg. hom $\quad \rho(y_j) = \sum y_i \otimes t_{ij}$

これらは $S_q(V)$, $\Lambda_q(V)$ に右 $A(Mat_q(n))$-comodule の構造を与える.

$$S_q(V) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_q(V)_d \quad , \quad S_q(V)_d \subset S_q(V)$$

sub-comodule

即ち $\rho(S_q(V)_d) \subset S_q(V)_d \otimes \mathcal{A}$.

$S_q(V)_d$ $\quad d$次対称テンソル表現

$$= V_{\underbrace{\square\square\square\square}_{d}} = V(d\varepsilon_1)$$

$$\Lambda_q(V) = \bigoplus_{d=0}^{n} \Lambda_q(V)_d \quad ,$$

$$\Lambda_q(V)_d = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_d} \mathbb{C}\, y_{i_1} \cdots y_{i_d}$$

sub comodule

$$\Lambda_q(V)_d = V_{\boxminus\}d} = V(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d)$$

y_i^2 ; $y_j y_i = -q\, y_i y_j$ $(i<j)$

quantum minors

$$\Lambda_q(V)_r = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_r} \mathbb{C}\, y_{i_1} \cdots y_{i_r}$$

$I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset \{1, \cdots, n\}$ に対し.

$y_I = y_{i_1} \cdots y_{i_r}$ と書く

$\rho : \Lambda_q(V)_r \to \Lambda_q(V)_r \otimes \mathcal{A}$

base $(y_I)_{|I|=r}$ に関する行列要素を ξ^I_J と書く: $(|I|=|J|=r)$

$$\rho(y_J) = \sum_I y_I \otimes \underset{\underset{\mathcal{A}}{\cap}}{\xi^I_J}$$

そうすると

$$\begin{cases} \Delta(\xi^I_J) = \sum_{|K|} \xi^I_K \otimes \xi^K_J \\ \varepsilon(\xi^I_J) = \delta_{I,J} \end{cases}$$

$$\rho(y_j) = \sum_i y_i \otimes t_{ij}$$

$J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ に対し

$$\rho(y_J) = \rho(y_{j_1}) \cdots \rho(y_{j_r})$$

$$= \left(\sum_{k_1} y_{k_1} \otimes t_{k_1 j_1}\right) \cdots \left(\sum y_{k_r} \otimes t_{k_r j_r}\right)$$

$$= \sum y_{k_1} \cdots y_{k_r} \otimes t_{k_1 j_1} \cdots t_{k_r j_r} \quad (*)$$

$k_1, \cdots, k_r$ の中に重複があるときは

$$y_{k_1} \cdots y_{k_r} = 0.$$

それ以外は

$\exists w \in \mathfrak{S}_r$; $\{k_1, \cdots, k_r\} = \{i_1 < \cdots < i_r\}$

$k_\nu = i_{w(\nu)}$

$$y_{k_1} \cdots y_{k_r} = (-q)^{\ell(w)} y_{i_1} \cdots y_{i_r}$$

$$\ell(w) = \#\{(i,j),\ 1 \le i < j,\ w(i) > w(j)\}$$

転倒数

$$(*) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} y_{i_1} \cdots y_{i_r} \otimes \sum_{w \in \mathfrak{S}_r} (-q)^{\ell(w)} t_{i_{w(1)} j_1} \cdots t_{i_{w(r)} j_r}.$$

$$\therefore\ \xi^I_J = \sum_{w \in \mathfrak{S}_r} (-q)^{\ell(w)} t_{i_{w(1)} j_1} \cdots t_{i_{w(r)} j_r}$$

一般に

$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$

$$\det_q(A) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_r} (-q)^{\ell(w)} a_{w(1)1} \cdots a_{w(r)r}$$

と書くと (quantum determinant)

$$\xi^I_J = \det_q(T^{I \leftarrow 行}_{J \leftarrow 列})$$

まとめると

$I, J \subset \{1, \cdots, n\}$ $\quad |I| = |J| = r$

$\xi^I_J = \det_q(T^I_J)$ $\quad T^I_J = (t_{i_\mu j_\nu})_{\mu\nu}$

$I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$

$J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$

$$\begin{cases} \Delta(\xi^I_J) = \sum_{|K| = r} \xi^I_K \otimes \xi^K_J \\ \varepsilon(\xi^I_J) = \delta_{I,J} \end{cases}$$

とくに $r = n$

$$\begin{cases} \Delta(\det_q(T)) = \det_q(T) \otimes \det_q(T) \\ \varepsilon(\det_q(T)) = 1 \end{cases}$$

④ Laplace 展開

$I, J \subset \{1, \cdots, n\}$ $\quad |I| = |J| = r$

$I = I_1 \sqcup I_2$, $\quad |I_1| = r_1$, $|I_2| = r_2$ $\quad r_1 + r_2 = r$

$$\mathrm{sgn}_q(I_1, I_2)\, \xi^I_J = \sum_{\substack{J_1 \sqcup J_2 = J \\ |J_\nu| = r_\nu}} \xi^{I_1}_{J_1} \xi^{I_2}_{J_2}\, \mathrm{sgn}_q(J_1, J_2)$$

$$\mathrm{sgn}_q(I, J) = \begin{cases} 0 & I \cap J \ne \phi \\ (-q)^{\ell(I,J)} & I \cap J = \phi \end{cases}$$

$l(I,J) = \#\{(i,j) \in I \times J \,;\; i > j\}$ ┘

証明は

$\rho(y_{J_1} y_{J_2}) = \rho(y_{J_1})\rho(y_{J_2})$

$$= \Big(\sum_{I_1} y_{I_1} \otimes \xi^{I_1}_{J_1}\Big)\Big(\sum_{I_2} y_{I_2} \otimes \xi^{I_2}_{J_2}\Big)$$

$= \cdots$

を書く（これでIの分割の式が出るが.）

◦ 特別な場合として

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}_q(\hat{i},j)\,\det_q(T) = \sum_k \xi^{\hat{k}}_{\hat{i}}\, t_{kj}\, \mathrm{sgn}_q(\hat{k},k) \\ \mathrm{sgn}_q(i,\hat{j})\,\det_q(T) = \sum_k t_{ik}\, \xi^{\hat{j}}_{\hat{k}}\, \mathrm{sgn}_q(k,\hat{k}) \end{cases}$$

$\hat{i} = \{1,\cdots,\hat{i},\cdots n\}$

これから

$$\tilde{t}_{ij} = \xi^{\hat{j}}_{\hat{i}}(-q)^{i-j}$$

と置くと

$$\tilde{T} = (\tilde{t}_{ij})_{ij}$$

について　$\tilde{T}T = T\tilde{T} = (\det_q T)\cdot \mathrm{Id}$ ┘

定理1.6

(1) $\det_q(T) \in \mathrm{Cent}(A(\mathrm{Mat}_q(n)))$

(2) q が1の巾根でなければ

$\mathrm{Cent}(A(\mathrm{Mat}_q(n))) = \mathbb{C}[\det_q(T)]$

∵) (1)だけ

$$T(\det_q T) = T(\tilde{T}T) = (T\tilde{T})T$$
$$= \det_q(T)\cdot T$$

即ち　$t_{ij}\det(T) = \det(T)t_{ij}$ ┘

◎ Plücker relation も成立.

例　$\xi^{12}_{12}\xi^{12}_{34} - q\,\xi^{12}_{13}\xi^{12}_{24} + q^2\,\xi^{12}_{14}\xi^{12}_{23} = 0.$

辞書式 ①　②

4° $A(GL_q(n))$

$$A(GL_q(n)) = A(Mat_q(n)) \otimes_{\mathbb{C}[\det_q T]} \mathbb{C}[\det_q(T)^{\pm 1}]$$

$$= \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A(Mat_q(n)) \det_q(T)^m$$

Δ, ε は自然にこの alg. に延長される.

命題1.7

$\exists!\ S : A(GL_q(n)) \to A(GL_q(n))$ $\mathbb{C}$-alg の anti-hom

s.t.

$$S(t_{ij}) = \tilde{t}_{ij} \det_q(T)^{-1},$$

$$S(\det_q(T)) = \det_q(T)^{-1}$$

これによって $A(GL_q(n))$ は Hopf algebra.

∵) $S(T) = (S(t_{ij})) = \tilde{T} \det_q(T)^{-1}$

$\therefore\ S(T)T = TS(T) = id$

$$R^+_{12} T_2 T_1 = T_1 T_2 R^+_{12}$$

$$\Rightarrow\ S(T_2)S(T_1)R^+_{12} = R^+_{12} S(T_1) S(T_2)$$

§2 $U_q(gl(n))$ とその中心元

$$A_q(GL(n)) \longleftrightarrow U_q(gl(n))$$

1° $U_q(gl(n))$

定義2.1. $U_q(gl(n))$

generators : $q^{\pm\varepsilon_1}, \cdots, q^{\pm\varepsilon_n}$, $e_1, \cdots, e_{n-1}$, $f_1, \cdots, f_{n-1}$

relations : $q^h q^{h'} = q^{h'} q^h = q^{h+h'}$, $q^0 = 1$

$\left(\begin{array}{ll} P^* = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n & \text{free } \mathbb{Z}\text{-module} \\ q^h \ (h \in P^*) & \langle\ ,\ \rangle\ \varepsilon_i \text{ が orthonormal basis となる内積} \end{array} \right)$

$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$

$$q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i\rangle} e_i$$

$$q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i\rangle} f_i$$

$$e_i f_j - f_j e_i = \frac{q^{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} - q^{-\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}}{q - q^{-1}} \delta_{ij}$$

$|i-j|>1$: $[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0$

$|i-j|=1$: $\begin{cases} e_i^2 e_j - (q+q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0 \\ f_i^2 f_j - (q+q^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0 \end{cases}$

Hopf代数の構造

$$\begin{cases} \Delta(q^h) = q^h \otimes q^h, & \varepsilon(q^h)=1 \\ \Delta(e_i) = e_i \otimes q^{-\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}} + 1 \otimes e_i & \varepsilon(e_i)=0 \\ \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + q^{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} \otimes f_i & \varepsilon(f_i)=0 \end{cases}$$

さらに この Hopf代数の構造について

Hopf代数の pairing

$$(\ ,\ ): U_q(\mathfrak{gl}(n)) \times A_q(GL(n)) \to \mathbb{C}$$

で 次のようなものが 唯一つ存在する.

生成元での値

$$(q^h, T) = \mathrm{diag}\left(q^{\langle h,\varepsilon_1\rangle}, \dots, q^{\langle h,\varepsilon_n\rangle}\right)$$

$$(e_i, T) = e_{i+1,i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & i & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} & (i+1 \end{array}$$

$$(f_i, T) = e_{i,i+1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} & (i \\ \begin{array}{ccc} & & i+1 \end{array} & \end{array}$$

simple roots e_i, f_i のみならず
一般の root に対応する元の構成については
明日, R-matrix を用いて述べる.

17:30.

6/6 (木) 15:30−

きのうの文献のこと

G.M. Bergman: The diamond lemma for ring theory
Adv. in Math. 29 (1978) 178−218
最初の5ページ.

2° RTF の枠組

$$A_q = A_q(GL(n))$$

$$U_q \times A_q \to \mathbb{C} \ ; \ U_q \to A_q^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A_q, \mathbb{C})$$

この image で U_q を作る.

$$L^+_{ij},\ L^-_{ij} \ (1 \le i,j \le n) \in A_q^\vee$$

$$L^+ = (L^+_{ij})_{ij} \quad L^+_{ij} = 0 \ (i > j) \quad \text{上三角}$$

$$L^- = (L^-_{ij})_{ij} \quad L^-_{ij} = 0 \ (i < j) \quad \text{下三角}$$

$n=2$

$$R^+ = \begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & q & & & \\ 12 & & 1 & q-q^{-1} & \\ 21 & & & 1 & \\ 22 & & & & q \end{array}$$

$(q-q^{-1})f$ (おおよそ)

q^{ε_2}

q^{ε_1}

表現行列

$$\left(\begin{array}{c|c} q^{\varepsilon_1} & (q-q^{-1})t \\ \hline 0 & q^{\varepsilon_2}\end{array}\right)$$ と T との pairing の表 から R^+

- $(L^+_{ij}, t_{\alpha\beta}) = R^{+}{}^{i\alpha}_{j\beta}$
- $\Delta(L^+_{ij}) = \sum_k L^+_{ik} \otimes L^+_{kj}$, $\varepsilon(L^+_{ij}) = \delta_{ij}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (L^+_{ij}, \varphi\psi) = \sum_k (L^+_{ik}\varphi)(L^+_{kj}\psi) \\ (L^+_{ij}, 1) = \delta_{ij} \end{cases}$$

このようなものが存在するか check.（T の交換関係と compatible か.）

$$\begin{cases} (L^+_1, T_2) = R^+_{12} \\ \Delta(L^+) = L^+ \dot{\otimes} L^+ \quad , \quad \varepsilon(L^+) = id \end{cases}$$

$$R^+_{12} T_2 T_1 = T_1 T_2 R^+_{12}$$

$$(L^+_0, R^+_{12} T_2 T_1) = R^+_{12} (L^+_0, T_2)(L^+_0, T_1)$$
$$= R^+_{12} R^+_{02} R^+_{01}$$
$$(L^+_0, T_1 T_2 R^+_{12}) = R^+_{01} R^+_{02} R^+_{12}$$
)) YBE.

命題 2.2

$\exists !\ L^+ = (L^+_{ij})$, $L^- = (L^-_{ij}) \in Mat(n; A_q^\vee)$

s.t.

(1) $(L_1^\pm, T_2) = R^\pm_{12}$

(2) $\begin{cases} \Delta(L^\pm) = L^\pm \dot{\otimes} L^\pm \\ \varepsilon(L^\pm) = id \end{cases}$

$\lrcorner$

証 q^{ε_i}, e_i, f_i との対応 | $R^+ = q\sum e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j} e_{ii}\otimes e_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} e_{ij}\otimes e_{ji}$

$(L^+_{ii}, T) = \mathrm{diag}(1, \dots, \overset{i}{q}, \dots 1)$

$i<j$ $(L^+_{ij}, T) = (q-q^{-1}) e_{ji}$

$\Delta(L^+_{ii}) = L^+_{ii} \otimes L^+_{ii}$ $\qquad \varepsilon(L^+_{ii}) = 1$

$\therefore L^+_{ii} = q^{\varepsilon_i}$

$$\Delta(L^+_{i\,i+1}) = L^+_{ii} \otimes L^+_{i\,i+1} + L^+_{i\,i+1} \otimes L^+_{i+1,i+1}$$
$$= q^{\varepsilon_i} \otimes L^+_{i\,i+1} + L^+_{i\,i+1} \otimes q^{\varepsilon_{i+1}}$$

$(L^+_{i,i+1}, T) = e_{i+1,i}$ ..

$L^+_{i\,i+1} q^{-\varepsilon_{i+1}}$ $\approx f_i$ (pairing を比べて)

$L^+_{i\,i+1} = (q-q^{-1}) f_i\, q^{+\varepsilon_{i+1}}$

同様

$$\begin{cases} L^-_{ii} = q^{-\varepsilon_i} \\ L^-_{i+1\,i} = -(q-q^{-1})\,q^{-\varepsilon_{i+1}} e_i \end{cases}$$

$$L^+ = \begin{pmatrix} q^{\varepsilon_1} & (q-q^{-1})f_i \cdots \\ 0 & q^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} \qquad L^- = \begin{pmatrix} q^{-\varepsilon_1} & 0 \\ -(q-q^{-1})e_i \cdots & q^{-\varepsilon_n} \end{pmatrix}$$

⑩ L^+_{ij}, L^-_{ij} の交換関係

$$\Delta : A_q \to A_q \otimes A_q$$
$$\Downarrow$$
$$\mu : A_q^\vee \otimes A_q^\vee \hookrightarrow (A_q \otimes A_q)^\vee \xrightarrow{\Delta^\vee} A_q^\vee$$

$A_q^\vee$ は $\mathbb{C}$-alg, $U_q \to A_q^\vee$.

命題2.3

(1)
$$\begin{cases} R^+_{12} L^+_1 L^+_2 = L^+_2 L^+_1 R^+_{12} \\ R^+_{12} L^-_1 L^-_2 = L^-_2 L^-_1 R^+_{12} \\ R^+_{12} L^+_1 L^-_2 = L^-_2 L^+_1 R^+_{12} \end{cases}$$

$$L^+_{ii} L^-_{ii} = L^-_{ii} L^+_{ii} = 1.$$

(2) $L(x) = x L^+ - x^{-1} L^-$ x : spectral parameter

$$R_{12}(xy^{-1}) L_1(x) L_2(y) = L_2(y) L_1(x) R_{12}(xy^{-1})$$

∵) $(L_1^+ L_2^+, T_3) = (L_1^+ \otimes L_2^+, T_3 \otimes T_3)$

$= R^+_{13} R^+_{23}$

$(R^+_{12} L^+_1 L^+_2, T_3) = R^+_{12} R^+_{13} R^+_{23}$

$(L^+_2 L^+_1 R^+_{12}, T_3) = R^+_{23} R^+_{13} R^+_{12}$

よって 生成元での値は等しい.

$M_{12} = R^+_{12} L^+_1 L^+_2$

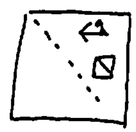
$\Delta(M_{12}) = M_{12} \otimes (R^+_{12})^{-1} M_{12}$

$N_{12} = L^+_2 L^+_1 R^+_{12}$ も Δ は同じ //

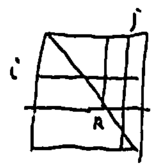
注意

上の(1) $\Rightarrow$ $[L^+_{ik}, L^+_{kj}] = -(q-q^{-1}) L^+_{ij}\, q^{\varepsilon_k}$

$(i<k<j)$

L^+ 

$[a, d] = -(q-q^{-1})bc$



$i<j$: $L^+_{ij} = (q-q^{-1}) E_{ji}\, q^{\varepsilon_j}$

$j<i$: $L^-_{ij} = -(q-q^{-1})\, q^{\varepsilon_j} E_{ji}$

$E_{i,i+1} = e_i$, $E_{i+1,i} = f_i$

$i<k<j$
$i>k>j$ $\quad E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - q^{\pm} E_{kj}E_{ik}$

となって 神保さんのと同じになる.

以下

$$U_q = \mathbb{C}[L^+_{ij}, L^-_{ij}, 命題2.3の(1)]$$

実は $U_q(gl(n))$ と同じ

($U_q(gl(n)) \to U_q$ ができて
E_{ij} を上の如く定義して 命題2.3の交換関係が
[山本, PBW] いえればよい

(III) $U_q \times A_q \to \mathbb{C}$ から

A_q は両側 U_q-module str をもつ

・左 U_q-module (左正則表現)

$$L^\pm_1 . T_2 = T_2 R^\pm_{12}$$

・右 U_q-module (右 〃 〃)

$$T_2 . L^\pm_1 = R^\pm_{12} T_2$$

(注意) $S(L^\pm)$?

$L^\pm$は三角行列で

$$L^\pm S(L^\pm) = id = S(L^\pm)L^\pm$$

$S(L^\pm)$は $L^\pm$ から Neumann 級数でつくればよい.

3° RTF の C_k $(k=0,1,2\cdots) \in \mathrm{Cent}(U_q)$

$A = (A_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n, U_q)$ に対し

$$\mathrm{tr}_q(A) = \sum_{i=1}^{n} q^{n-2i+1} A_{ii} \quad (\text{quantum trace})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q^{\langle 2\rho, \varepsilon_i \rangle} A_{ii}$$

2ρ = 正ルート $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i<j)$ の和
$= (n-1)\varepsilon_1 + (n-3)\varepsilon_2 + \cdots + (-n+1)\varepsilon_n$

$$(L^+S(L^-))_{ij} = \sum_k L^+_{ik} S(L^-_{kj})$$

$$C_1 = \mathrm{tr}_q(L^+ \mathcal{S}(L^-)) = \sum_{i,j} q^{\langle 2\rho, \varepsilon_i \rangle} L^+_{ij} S(L^-_{ji})$$

$$C_k = \mathrm{tr}_q((L^+S(L^-))^k) \quad (k=0,1,\cdots)$$

定理2.4 $C_k \in \mathrm{Cent}(U_q)$ $(k=0,1,\cdots)$

① U_q の adjoint 表現.

$\mathrm{ad}\ ;\ U_q \to \mathrm{End}(U_q)$ $\mathbb{C}$-alg. hom

$a\in U_q$, $\Delta(a)=\sum_i a_i^1\otimes a_i^2$ のとき

$\mathrm{ad}(a)x = \sum_i a_i^1\, x\, S(a_i^2)$. (left U_q-module)

命題2.5 上の ad によって U_q は U_q-symmetry をもつ $\mathbb{C}$ algebra となる:

$$\begin{cases} \mathrm{ad}(a)(xy) = \sum_i \mathrm{ad}(a_i^1)x\ \mathrm{ad}(a_i^2)y \\ \mathrm{ad}(a)1 = \varepsilon(a) \end{cases}$$

さらに

$$\mathrm{Cent}(U_q) = \{c\in U_q\ ;\ \mathrm{ad}(a)c = \varepsilon(a)c\ \ \forall a\in U_q\}$$

(注) ・$\Delta(a)=a\otimes a$, $\varepsilon(a)=1$

$\Rightarrow \mathrm{ad}(a)x = axa^{-1}$

・$\Delta(l) = l\otimes 1 + a\otimes l$, $\varepsilon(l)=0$

$\Rightarrow \mathrm{ad}(l) = lx - axa^{-1}l$

・$\Delta(l) = l\otimes a^{-1} + 1\otimes l$, $\varepsilon(l)=0$

$\Rightarrow \mathrm{ad}(l)x = [l,x]a$

補題2.6 $X = L^+S(L^-) \in \mathrm{Mat}(n, U_q)$

とおくと

$\mathfrak{g}_q = \bigoplus_{i,j}\mathbb{C}X_{ij}$ (正確には $\sum_{i,j}\mathbb{C}X_{ij}$ とまず書く)

$\subset U_q$

は ad に関する U_q-submodule

((注) q が1のべキ根でなければ ad で

$\mathfrak{g}_q = V(\varepsilon_1)^\vee\otimes V(\varepsilon_1) = V(0)+V(\varepsilon_1-\varepsilon_n)$))

(証明)

$$\begin{aligned} R_{12}^+ L_1^+ X_2 &= R_{12}^+ L_1^+ L_2^+ S(L_2^-) \\ &= L_2^+ L_1^+ R_{12}^+ S(L_2^-) \\ &= L_2^+ S(L_2^-) R_{12}^+ L_1^+ = X_2 R_{12}^+ L_1^+ \end{aligned}$$

$R_{12}^+ L_1^+ L_2^- = L_2^- L_1^+ R_{12}^+$

$S(L_2^-)\ \square\ S(L_2^-)$)

$$\therefore\ \underbrace{L_1^+ X S(L_1^+)}_{\Delta(L^+)=L^+\otimes L^+} = (R_{12}^+)^{-1} X_2 R_{12}^+$$

で $\mathrm{ad}(L_1^+)X_2 = (R_{12}^+)^{-1} X_2 R_{12}^+$

同様に $\mathrm{ad}(L_1^-)X_2 = (R_{12}^-)^{-1} X_2 R_{12}^-$

補題2.7

$A \in Mat(n; U_q)$

$B_{12} = (R_{12}^{\pm})^{-1} A_2 (R_{12}^{\pm})$ （複号同順）

とおくと

$tr_q^{(2)} B = (tr_q A)\, id_1$ 〈自分で検証〉

$ad(L_1^{\pm}) X_2 = (R_{12}^{\pm})^{-1} X_2 R_{12}^{\pm}$

$tr_q^{(2)}$: $ad(L_1^{\pm}) tr_q(X) = tr(X)\, id_1 = tr_q(X)\, \varepsilon(L_1^{+})$

$\therefore\ tr_q(X) \in Cent(U_q)$

同様に

$ad(L_1^{\pm}) X_2^{k} = (R_{12}^{\pm})^{-1} X_2^{k} R_{12}^{\pm}$

で $C_k = tr_q(X^k) \in Cent(U_q)$

定理2.4.

$X_{n,1} = q^{\varepsilon_n} S(L_{n1}^{-})$ 

highest wt vect for $V(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)$

注意 $C_0 = [n] = \dfrac{q^{n} - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

$C_1 = \sum_{i,j} q^{\langle 2\rho, \varepsilon_i \rangle} L_{ij}^{+} S(L_{ji}^{-})$

$C_1|_{V(\lambda)} = \sum_{i} q^{2\langle \lambda+\rho, \varepsilon_i \rangle}$ $\qquad q^{\lambda+\rho}$

$C_k|_{V(\lambda)}$ = Hall-Littlewood polynomial

$P_{\square\square\square}(q^{2(\lambda+\rho)}; \underset{t}{q^{-2}})$

$\sum_{|Y|=k} (1-q^{-2})^{\ell(Y)-1} m_Y(q^{2(\lambda+\rho)})$

4° $z(x) \in Cent(U_q)$

$L(x) = xL^{+} - xL^{-}$

$\dfrac{1}{q-q^{-1}} L(q^{s})_{ij} \xrightarrow[q \to 1]{} E_{ji} + \delta_{ij} s$

$z(x) = \dfrac{1}{(q-q^{-1})^{n}} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-q)^{\ell(w)} L_{w(n)n}(xq^{-n+1}) \cdots L_{w(1)1}(x)$

と定めると

定理2.8 $z(x) \in Cent(U_q)$

$$z(x) = (-)^n x^{-n} Z_0 + (-)^{n-1} x^{-n+2} Z_1 + \cdots x^n Z_n$$

$$Z_k \in Cent(U_q) \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

（証明について）

$$\underset{U_q\text{-module}}{\overset{\rightarrow}{U_q}} \otimes \Lambda_q(V) \xrightarrow[\text{Lを使って作る}]{\exists} \Lambda_q(V) \otimes U_q$$

注意

(1) $z(x)\Big|_{V(\lambda)} = \{xq^{\lambda_1}\} \cdots \{xq^{\lambda_n - n+1}\}$

$$\{x\} = \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}$$

(2) $z(x) = \sum_{r=0}^{n} (-)^{n-r} x^{-n+2r} Z_r$

$$Z_0 = q^{-(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)} q^{\binom{n}{2}}$$

$$Z_1 = q^{\binom{n-1}{2}} q^{-(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)} C_1$$

§3 Capelli 恒等式の quantum analogue

$$\mathfrak{gl}(n) = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C} E_{ij}$$

$$\underset{\text{右正則}}{\mathfrak{g} \rightarrow} A(GL(n)) \underset{\text{左正則}}{\leftarrow \mathfrak{g}}$$

$$U(\mathfrak{g}) \to End(A(GL(n))) \quad 右 \quad E_{ij}$$
$$U(\mathfrak{g})^{op} \to End(A(GL(n))) \quad 左 \quad E_{ij}^{\circ}$$

$$E_{ij} = \sum_k t_{ki} \frac{\partial}{\partial t_{kj}}$$

$$E_{ij}^{\circ} = \sum_k t_{jk} \frac{\partial}{\partial t_{ik}}$$

$$\det\begin{pmatrix} E_{nn} & E_{n-1\,n} & & E_{1n} \\ & E_{n-1\,n-1}+1 & \ddots & \\ E_{n1} & & & E_{11}+n-1 \end{pmatrix} = \det(T)\det\left(\frac{\partial}{\partial T}\right) \in Cent(U(\mathfrak{g}))$$

$$\left(\det(A) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(w) A_{w(1)1} \cdots A_{w(n)n} \right)$$

Capelli identity.

$$\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$$

$n=2$, 日比-若山

一般の n ; N, 梅田, 若山

1° $\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$ の対応物をつくる.

$$L(x)_{ij} = x L^+_{ij} - x^{-1} L^-_{ij}$$

$$\frac{1}{q-q^{-1}} L(q^s)_{ij} \underset{s\to 1}{\longrightarrow} E_{ji} + \delta_{ij}\cdot s$$

命題3.1

$$\exists!\ \partial_{ij}(x) = x\partial^+_{ij} - x^{-1}\partial^-_{ij} \in \mathrm{End}(A_q)\otimes\mathbb{C}[x,x^{-1}] \quad (1\le i,j\le n)$$

s.t.

$$\frac{1}{q-q^{-1}} L(x)_{ji} = \sum_k t^o_{ki}\,\partial_{kj}(x) \qquad (\text{左-}U_q\text{-module})$$

$$\frac{1}{q-q^{-1}} L(x)^o_{ji} = \sum_k t_{jk}\,\partial_{ik}(x) \qquad (\text{右 }U_q\text{ module})$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} A_q & \to & A_q & \leftarrow & A_q \\ \varphi^L & \mapsto & & \mapsfrom & \varphi^o\ (\text{右かけ算}) \end{array}\right)$$

$$\because)\ \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(q-q^{-1})} L(x)_{ji}.\varphi = \sum_k (\partial_{kj}(x)\varphi)\, t_{ki} \\ \frac{1}{(q-q^{-1})} \varphi.L(x)_{ji} = \sum_k t_{jk}(\partial_{ik}(x)\varphi) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{q-q^{-1}} L(x).\varphi = ({}^t\partial(x)\varphi)\, T \\ \frac{1}{q-q^{-1}} \varphi.L(x) = T\, {}^t\partial(x)\varphi \end{array}\right.$$

$$(q-q^{-1})\,\partial(x)\varphi = (L(x).\varphi)\, S(T)$$

$$= S(T)(\varphi.L(x))$$

示すべきこと

$$T(L(x).\varphi) = (\varphi.L(x))\,T \qquad \forall\varphi\in A_q$$

$$T(L^\pm.\varphi) = (\varphi.L^\pm)\,T$$

$\varphi = T_a$ とき

$$T_0(L^\pm.T_1) = (T_1.L_0^\pm)\,T_0$$

$$T_0T_1R_{01}^\pm = R_{01}^\pm T_1T_0 \qquad (\text{交換関係.})$$

$$\left(T_0 . L^{\pm}.(T_1\cdots T_n)\right.$$
$$\left. = T_0T_1\cdots T_m R_{01}^{\pm}\cdots R_{0m}^{\pm}\quad \text{と直接やってもよい})\right.$$

induction

$\varepsilon = \pm$

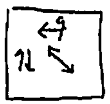
$$TL^{\varepsilon}.(\varphi\psi)$$
$$= T(L^{\varepsilon}\varphi)(L^{\varepsilon}\psi)$$
$$= (\varphi . L^{\varepsilon})T(L^{\varepsilon}\psi) = (\varphi . L^{\varepsilon})(\psi . L^{\varepsilon})T. \qquad //$$

補題3.2.

(0) $\partial_{ij} = \partial_{ij}(1) = \partial_{ij}^{+} - \partial_{ij}^{-}$

$$\partial_{ij}(t_{\alpha\beta}) = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}$$
$$\partial_{ij}(t_{\alpha_1}^{a_1}\cdots t_{\alpha_n}^{a_n})$$
$$= \delta_{i\alpha}[a_j]\ q^{\sum_{\nu>j}a_\nu}\, t_{\alpha_1}^{a_1}\cdots t_{\alpha_j}^{a_j-1}\cdots t_{\alpha_n}^{a_n}$$

(1) $$\begin{cases} R_{12}^{+}\,\partial_2^{\varepsilon}\partial_1^{\varepsilon} = \partial_1^{\varepsilon}\partial_2^{\varepsilon}R_{21}^{+} & (\varepsilon=\pm) \\ R_{12}^{+}\,\partial_2^{+}\partial_1^{-} = \partial_1^{-}\partial_2^{+}R_{21}^{\cancel{+}} \to - & \end{cases}$$



(2) operatorとして

$$\begin{cases} \partial_1^{\pm}T_2 = T_2\,\partial_1^{\pm}\,{}^{t_1}R_{12}^{\pm} \\ \partial_1^{\pm}T_2^{o} = {}^{t_1}R_{12}^{\pm}\,T_2^{o}\,\partial_1^{\pm} \end{cases}$$

2° Capelliの恒等式

定理3.3.

$$\zeta(xq^{n-1}) = q^{\binom{n}{2}}\det_q(T)\,\det_{q^{-1}}({}^t\partial(x)),$$
$$\det_q A = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n}(-q)^{l(w)}A_{w(1)1}\cdots A_{w(n)n}$$

系 $$\det_{q^{-1}}({}^t\partial(x))\det_q(T)^{s+1}$$
$$= \{xq^{s+1}\}\{xq^{s+2}\}\cdots\{xq^{s+n}\}\det_q(T)^{s}\times q^{-\binom{n}{2}}$$

(Cayleyの公式)

$\det_q(T)^s$: weight $(s+1)(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)$

証明の概略（計算による証明）

$\mathrm{End}(A_q)$ の中で

$$L(x)^{\circ} = (q-q^{-1})\, T\, {}^{t}\partial(x)$$

$D(x) = (q-q^{-1})\, {}^{t}\partial(x)$ とおくと

$$L(x)^{\circ} = T D(x)$$

$\Lambda_q(V) \otimes \mathrm{End}(A_q)$ という $\mathbb{C}$-alg の中で考える.

$$\Lambda_q(V) = \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_n \,;\, y_i^2 = 0,\ q y_i y_j + y_j y_i = 0\ (i<j)]$$

$$y_j \longmapsto \xi_j(x) = \sum_i y_i \otimes L(x)^{\circ}_{ij}$$

$$\searrow \qquad\qquad \|$$

$$\eta_j = \sum_i y_i \otimes t_{ij} \mapsto \xi_j(x) = \sum_i \eta_i D_{ij}(x)$$

spectral parameter $x_1, \cdots, x_n$ （n個用意）

$$\xi_1(x_1)\xi_2(x_2)\cdots\xi_n(x_n)$$

$$= \Big(\sum_{k_1} y_{k_1} \otimes L(x_1)^{\circ}_{k_1 1}\Big)(\cdots)\cdots$$

$$= y_1 y_2 \cdots y_n \otimes \det\nolimits_q \left(L(x_j)^{\circ}_{ij},\ 1 \le i,j \le n\right)$$

$(x_1, \cdots, x_n) = (x, xq^{-1}, \cdots, xq^{-(n-1)})$ と特殊化すると

$$y_1 \cdots y_n \otimes \underbrace{(q-q^{-1})^n Z(x)^{\circ}}_{= Z(x)}$$

補題3.4

(0) $\eta_i^2 = 0,\ q\eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0 \quad (i<j)$ （$\Lambda(V)_q$ comodule str）

(1) $\begin{cases} \xi_i(x)\xi_i(xq^{-1}) = 0 \\ q\,\xi_i(x)\xi_j(xq^{-1}) + \xi_j(x)\xi_i(xq^{-1}) = 0 \quad (i<j) \end{cases}$

(2) $\xi_i(x)\eta_j = -\eta_j \xi_i(xq^{-1}) \quad (\forall i,j)$

（$\Uparrow\ Y_1 Y_2 R(q) = 0$）

これらを使って計算を実行すると Capelli 式が得られる.

17:30.

$$U_q^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{End}(A_q)^{\mathrm{ad}}$$

同時に有限次元的にはいかない
微妙にからむ.

6/7 (金) 15:30-

(Capelli の証明)

$$y_j \xrightarrow{L(x)^\circ} \zeta_j(x) = \sum_i y_i \otimes L(x)^\circ_{ij}$$

$$\Vert$$

$$y_j \xrightarrow{T} \eta_j = \sum_i \eta_i \otimes t_{ij} \xrightarrow{D(x)} \zeta_j(x) = \sum_i \eta_i D(x)_{ij}$$

$(x_1, \cdots, x_n) = (x, xq^{-1}, \cdots, xq^{-n+1})$

とすると

$$\zeta_1(x_1)\cdots\zeta_n(x_n) = y_1\cdots y_n \otimes (q-q^{-1})^n z(x)^\circ$$

$$\begin{aligned}
\zeta_1(x_1)\cdots\zeta_n(x_n) &= \sum_k \zeta_1(x_1)\cdots\zeta_{n-1}(x_{n-1})\,\eta_k\, D(x_n)_{kn} \\
&= (-)^{n-1}\sum_k \eta_k\, \zeta_1(x_2)\cdots\zeta_{n-1}(x_n)\, D(x_n)_{kn} \\
&= (-)^{\binom{n}{2}} \sum_{k_1,\cdots,k_n} \eta_{k_n}\cdots\eta_{k_1}\, D(x_n)_{k_1 1}\cdots D(x_n)_{k_n n} \\
&= (-)^{\binom{n}{2}} \eta_n\cdots\eta_1 \det_{q^{-1}}(D(x_n)) \\
&= q^{\binom{n}{2}} \underbrace{\eta_1\cdots\eta_n}_{\downarrow} \det_{q^{-1}}(D(x_n))
\end{aligned}$$

$$y_1\cdots y_n \otimes \det_q(T)$$

$$\therefore\ (q-q^{-1})^n z(x) = q^{\binom{n}{2}} \det_q(T) \det_{q^{-1}}(D(x_n))$$

$\downarrow$ xq^{n-1} $\qquad\qquad$ $\Vert$ xq^{-n+1} $\downarrow$ x ┘

§2 の文献

Reshetikhin - Takhtajan - Faddeev

Leningrad Math. J. 1 (1990) 193-225

§4 $(GL(n)/SO(n))_q$ の帯球函数

$$gl(n) = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}E_{ij} \supset so(n) = \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(E_{ji} - E_{ij})$$

$$U_q(gl(n)) \supset \mathfrak{k} = \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(L^+_{ij} - S(L^-_{ji}))$$

《$+L^-_{ji}$ では うまくいかない》

0° Macdonald 対称多項式

$P_\lambda(x_1, \cdots, x_n; q, t) \in \mathbb{Q}(q,t)[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \qquad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$

homogeneous of degree $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

$x=(x_1,\cdots,x_n)$

$$P_\lambda(x;q,t) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu}\, m_\mu(x)$$

monomial sym. polyn   dominant order

q-差分方程式

$$\frac{(tx_k-x_1)\cdots\overset{k}{\vee}\cdots(tx_k-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots\hat{k}\cdots(x_k-x_n)}$$

$$D_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta(x_1,\cdots,\overset{k}{tx_k},\cdots x_n)}{\Delta(x_1,\cdots\cdots x_n)}\, T_{q,x_k}$$

$$\Delta(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

$$(T_{q,x_k}f)(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,qx_k,\cdots x_n)$$

q-shift operator.

$$D_1P_\lambda(x;q,t) = (q^{\lambda_1}t^{n-1}+\cdots+q^{\lambda_n})P_\lambda(x;q,t)$$

直交性, $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}$

D_1 は self-adjoint

D_r : $\binom{n}{r}$ コの場所に t を入れ T_{q,x_k} をかける

可換な family

Sekiguchi
Heckman-Opdam } の q-analogue.

1° $\mathfrak{k}$-fixed vector をもつ表現

$$M = (M_{ij})_{ij} \in Mat(n, U_q)$$

$$M_{ij} = L^+_{ij} - S(L^-_{ji})$$

とおくと

$$\begin{cases} M_{ij} = 0 \quad (i \geq j) \\ \dfrac{1}{q-q^{-1}} M_{ij} \xrightarrow[q\to 1]{} E_{ji} - E_{ij} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{k} := \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}M_{ij} \subset U_q$$

- 以下 $q \in \mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的と仮定する.
- 以下の議論では L^+_{ij}, $S(L^-_{ij})$ の交換関係が重要:

$$S(L_2^-)R_{12}^+L_1^+ = L_1^+R_{12}^+S(L_2^-)$$

命題4.1

(1) $U_q \cdot \mathfrak{k} = \sum_{i=1}^{n-1} U_q \cdot M_{i\,i+1}$,

$\mathfrak{k} \cdot U_q = \sum_{i=1}^{n-1} M_{i\,i+1} U_q$

(2) $J = U_q \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} U_q$ は coideal

$$\begin{cases} \Delta(J) \subset U_q \otimes J + J \otimes U_q \\ \varepsilon(J) = 0 \end{cases}$$

証明 詳しく言うと

(1) $i<k<j$ $[M_{ik}, M_{kj}] = -(q-q^{-1}) M_{ij} q^{\varepsilon_k}$

(2) $$\begin{cases} \Delta(M_{ij}) = \sum_k \left(L^+_{ik} \otimes M_{kj} + M_{ik} \otimes S(L^-_{jk})\right) \\ \varepsilon(M_{ij}) = 0. \end{cases}$$

$\lrcorner$

・$\mathfrak{k}$-fixed vector をもつ表現

・$P = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n$ weight lattice

・$P^+ = \{\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n \in P ;\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$

dominant integral weights

・$\lambda \in P^+$

$V(\lambda) = U_q u(\lambda)$ 既約な highest weight module

$$\begin{cases} q^h u(\lambda) = q^{\langle h, \lambda\rangle} u(\lambda) & h \in P^* \\ e_i u(\lambda) = 0 & (i = 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

定理 4.2

$\lambda \in P^+$ とし

$V(\lambda)_{\mathfrak{k}} := \{ v \in V(\lambda) ;\ \mathfrak{k} v = 0 \}$

とおくと

(1) $V(\lambda)_{\mathfrak{k}} \neq 0 \iff \lambda_i - \lambda_j \in 2\mathbb{Z}$

以下 $P^+_{\mathfrak{k}} = \{\lambda \in P^+ ;\ \lambda_i - \lambda_j \in 2\mathbb{Z}\}$

と置く

(2) $\lambda \in P^+_{\mathfrak{k}}$ のとき、 $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_{\mathfrak{k}} = 1$

証明の手順

(A) $v \in V(\lambda)_{\mathfrak{k}}$, $v \neq 0$ とし

$v = \sum_\mu v_\mu$. $\left(q^h_{\neq} v_\mu = q^{\langle h, \mu\rangle} v_\mu \right)$

と weight 分解すると $v_\lambda \neq 0$.

これから $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_{\mathfrak{k}} \leq 1$.

$M_{i\,i+1} = L^{+}_{i\,i+1} - S(L^{-}_{i+1\,i})$

f_i (下) $\quad e_i$ (上)

(B) $V(\lambda)_{\mathfrak{k}} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in P^{+}_{\mathfrak{k}}$

$\Rightarrow$) rank 1 の場合に帰着

$q^{-\varepsilon_2} M_{12} = q^{-1}(q-q^{-1})(f_1 - q^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} e_1)$

$\in U_q(sl(2))$

$f - q^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} e$ は V_ℓ $(\ell = 0,1,2,\dots)$ 上

semisimple

固有値 $-\sqrt{-1}\, q^{\frac{1}{2}} [m]$ $(m = \ell, \ell-2, \cdots, -\ell)$

これに 0 が入るかどうか

固有値に 0 が出る $\Leftrightarrow \ell$: even

$\Leftarrow$) は quantum minor を使って

具体的につくる

$$\begin{cases} \psi_r = \sum_{|J|=r} (\xi_J^{1\cdots r})^2 \in V(2\Lambda_r)_{\mathfrak{k}} & \Lambda_r = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r \\ \psi_1^{m_1} \cdots \psi_{n-1}^{m_{n-1}} \det_q(T)^\ell \end{cases}$$

2° 帯球函数

$G = GL(n)$, $K = SO(n)$

(0) $A_q(G) = \bigoplus_{\lambda \in P^+} W(\lambda)$, $W(\lambda) \simeq V(\lambda)^* \otimes V(\lambda)$

これは $\mathrm{Cent}(U_q)$ についての同時固有空間分解

(1) $\mathcal{H} = A_q(K\backslash G/K)$

$= \{ \varphi \in A_q(G) \,;\, \mathfrak{k}.\varphi = 0,\ \varphi.\mathfrak{k} = 0 \}$

これは命題 4.1 により subalgebra

$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in P^+_{\mathfrak{k}}} \mathbb{C} \varphi_\lambda$, $\varphi_\lambda \in \mathcal{H} \cap W(\lambda)$

$\varepsilon(\varphi_\lambda) = 1$ と normalize

① この φ_λ $(\lambda \in P^+_{\mathfrak{k}})$ を帯球函数と呼ぶ。

$\forall C \in \mathrm{Cent}(U_q)$; $C\varphi_\lambda = c(\lambda)\varphi_\lambda$

② torus への制限

$G = KAK$ $\qquad A(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm}]$

$\mathbb{T} = (\mathbb{C}^\times)^n \subset GL_q(n)$

$\mathrm{rest}_{\mathbb{T}} : A_q(G) \twoheadrightarrow A(\mathbb{T})$: Hopf alg hom

$t_{ij}|_{\mathbb{T}} = \delta_{ij} x_j$.

rest : $\mathcal{H} = A_q(K\backslash G/K) \subset A_q(G) \to A(\mathbb{T})$

定理 4.3.

rest: $\mathcal{H} \to A(\mathbb{T})$ は injective で

$$\mathcal{H}|_{\mathbb{T}} = \mathbb{C}[x_1^2, \dots, x_n^2]^{\mathfrak{S}_n}[(x_1\cdots x_n)^{\pm 1}]$$

とくに $\mathcal{H}$ は algebra として可換.

補題 4.4. $\lambda \in P_K^+$ のとき

$$\varphi_\lambda|_{\mathbb{T}} = \sum_{\mu \le \lambda} c_{\lambda\mu} x^{\lambda} \quad ; \quad c_{\lambda\lambda} \neq 0$$

$$\mu \in \lambda - Q^+$$

$$Q^+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\ge 0}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$$

($\lambda = 2l\varepsilon_1$: $\boxed{\quad\cdots\quad}$ のとき

$\varphi_\lambda|_{\mathbb{T}}$: Lauricella の F_D の q-analogue で書ける)

3° $C_1 \in \mathrm{Cent}(U_q)$ の radial part

$C \in \mathrm{Cent}(U_q)$, $C\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$

$A(\mathbb{T})$ 上の作用素 P で

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, hook, "\mathrm{rest}"] \arrow[d, "C"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A(\mathbb{T}) \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, hook, "\mathrm{rest}"'] & A(\mathbb{T}) \end{tikzcd} \qquad C\varphi|_{\mathbb{T}} = P(\varphi|_{\mathbb{T}})$$

となるものを C の radial part とよび

$$C|_{\mathbb{T}} = P$$

と書く

⑪ radial part を計算する原理.

(0)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, dotted] \arrow[d, hook] & \text{image} \simeq (U_q/U_q\mathfrak{k} + \mathfrak{k}U_q)^{\vee} \arrow[dl] \\ A_q(G) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (U_q)^{\vee} \arrow[d] \\ A(\mathbb{T}) \arrow[r, hook] & (\mathbb{C}[q^h, h \in P^*])^{\vee} \end{tikzcd}$$

dual で $\mathbb{C}[q^h, h \in P^*] \to U_q/U_q\mathfrak{k} + \mathfrak{k}U_q$.

$$A(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[x^{\pm}]$$
$$\updownarrow$$
$$\mathbb{C}[q^h \,;\, h \in P^*] = \mathbb{C}[\xi^{\pm}]$$
（xとの対称性の為文字をξにかえて）

$$(\xi_i = q^{\varepsilon_i} \,,\ \xi^h = q^h)$$

$$(\xi^h, x^\lambda) = q^{\langle h, \lambda \rangle}.$$

(1) $(\xi_i f(\xi), g(x)) = (f(\xi), T_{q,x_i} g(x))$

$\Leftrightarrow$ $(T_{q,\xi_i} f(\xi), g(x)) = (f(\xi), x_i g(x))$

$$\begin{cases} \hat{\xi}_i = T_{q,x_i} \\ \hat{T}_{q,\xi_i} = x_i \\ \widehat{Q_1 Q_2} = \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 \end{cases}$$

の形で formal な Fourier 変換を考える.

$$(Q(\xi, T_{q,\xi}) f(\xi), g(x)) = (f(\xi), \hat{Q}(x, T_{q,x}) g(x))$$

(2) modulo reduction by $U_q \mathfrak{k} + \mathfrak{k} U_q$

$C \in \mathrm{Cent}(U_q)$

$Q = Q(\xi, T_{q,\xi})$

$$f(\xi) C \equiv Q(\xi, T_{q,\xi}) f(\xi) \mod U_q \mathfrak{k} + \mathfrak{k} U_q$$
for ${}^\forall f(\xi) \in \mathbb{C}[\xi^{\pm}]$

$$\Rightarrow C|_{\mathbb{T}} = \hat{Q}(x; T_{q,x})$$

◎ C_1 の reduction

$$C_1 = \sum_{i,j} q^{\langle 2\rho, \varepsilon_i \rangle} L^+_{ij} S(L^-_{ji})$$

$$f(\xi) L^+_{ij} S(L^-_{ji}) \equiv Q_{ij}(\xi, T_{q,\xi}) f(\xi)$$

となるような作用素を探す.

交換関係

$$S(L_2^-) R_{12}^+ L_1^+ = L_1^+ R_{12}^T S(L_2^-) \quad \text{より}$$

○ $[L^+_{ij}, S(L^-_{ji})]$

$$= (1-q^{-2}) \Big\{ \sum_{i<\mu\le j} S(L^-_{j\mu}) L^+_{\mu j} - \sum_{i\le \nu<j} L^+_{i\nu} S(L^-_{\nu i}) \Big\}$$

○ $f(\xi) S(L^-_{ji}) L^+_{ij} = [T_{q^2,\xi_i} T^{-1}_{q^2,\xi_j} f(\xi)] L^+_{ij} S(L^-_{ji})$

補題4.5

t : parameter

$F_{ij} = F_{ij}(\xi_1,\dots,\xi_n, x_1,\dots,x_n) \quad (i \le j)$

有理函数

を次のように inductive に定める.

$$\begin{cases} F_{ii} = \xi_i & (i=1,\dots,n) \\ F_{ij} = \dfrac{(1-t)}{t(1-x_i x_j^{-1})}\Big\{\sum\limits_{i\le\nu<j} F_{i\nu} - \sum\limits_{i<\mu\le j} x_\mu x_j^{-1} F_{\mu j}\Big\} & (i<j) \end{cases}$$

このとき

(1) $$F_{ij} = \frac{-(1-t)^2}{t^{j-i}\Delta(x_i,\dots,x_j)} \sum_{k=i}^{j} \xi_k \frac{x_k x_j \Delta(x_i,\dots,t x_k,\dots,x_j)}{(x_j - t x_k)(t x_k - x_i)}$$

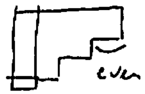
(2) $$\sum_{1\le\mu\le\nu\le n} t^{n-\mu} F_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\Delta(x_1,\dots,t x_k,\dots,x_n)}{\Delta(x_1,\dots,x_n)}$$

T係 D_1 の symbol.

定理4.6

(1) $$C_1\big|_T = q^{-(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta(x_1^2,\dots,q^2 x_k^2,\dots,x_n^2)}{\Delta(x_1^2,\dots,x_n^2)} \underbrace{T_{q^2,x_k}}_{T_{q^4,x_k^2}} \quad \blacksquare$$

(2) $\lambda \in P_\delta^+$ のとき



$\lambda = 2\mu + l(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)$

$\mu_1 \ge \dots \ge \mu_n \ge 0 \quad l \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_\lambda\big|_T = \text{const.}\, P_\mu(x_1^2,\dots,x_n^2; q^4, q^2)(x_1\cdots x_n)^l \quad \blacksquare$$

16:55.